REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
A.C.U.E. COLEGIO LOYOLA GUMILLA
Inscrito en el M. P. P. E. 30.09.1965 – Nº S0690D0701
Puerto Ordaz – Estado Bolívar

GUÍA SOBRE CONTENIDO DE LA UNIDAD IV-2do. LAPSO. 2018-2019

PROGRESIONES O SUCESIONES

En matemáticas, un par **ordenado** es una pareja de objetos matemáticos, en la que se distingue un elemento y otro. El par **ordenado** cuyo primer elemento es A y cuyo segundo elemento es B se denota como (a, b). Por **ejemplo**, los conjuntos {0, 1} y {1, 0} son idénticos, pero los **pares ordenados** (0, 1) y (1, 0) son distintos.

En función de la definición de un par ordenado se puede decir que una **sucesión** (o **progresión**) **numérica** es un conjunto de números ordenados. A cada uno de estos números los llamamos **términos** de la sucesión: a_1a_1 es el primer término, a_2a_2 es el segundo término, a_3a_3 es el tercer término... a_na_n es el nn-ésimo término.

Las cuales tienen las siguientes características que se definen como:

1. En función del número que tengan, las sucesiones pueden ser **finitas** o **infinitas**.
2. **Crecientes** si cada término es mayor que su anterior, es decir,

$$a_n \leq a_n + 1a_n \leq a_n+1$$

   O decrecientes sí:

$$a_n \geq a_n + 1a_n \geq a_n+1$$

3. Son **aritméticas** cuando cada término es la suma del término anterior más un número constante, al que llamamos **diferencia** y denotamos por **d**. Es decir,

$$a_n+1=a_n+da_n+1=a_n+d$$

4. Son **geométricas** cuando cada término es el término anterior multiplicado por un número constante, al que llamamos **razón** y denotamos por **r**. Es decir,

$$a_n+1=a_n\cdot ra_n+1=a_n\cdot r$$

En el caso de las sucesiones aritméticas y geométricas podemos encontrar una fórmula, a la que llamamos **fórmula general de la progresión**, que nos indica el valor de cualquier término de la sucesión sin necesidad de escribir los términos anteriores. Igualmente, podemos calcular la suma de *n* términos consecutivos y, en ocasiones, la suma de infinitos términos.

Fórmulas

SUCESIÓN ARITMÉTICA	
Es de la forma $\boldsymbol{a_1}$ $\boldsymbol{a_2} = a_1 + d$ $\boldsymbol{a_3} = a_2 + d$ $\boldsymbol{a_4} = a_3 + d$ …	
Diferencia $d = a_{n+1} - a_n$	Término general $a_n = a_1 + d(n-1)$
Suma de los *n* primeros términos $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	
SUCESIÓN GEOMÉTRICA	
$\boldsymbol{a_1}$ $\boldsymbol{a_2} = a_1 \cdot r$ $\boldsymbol{a_3} = a_2 \cdot r$ $\boldsymbol{a_4} = a_3 \cdot r$ …	
Razón $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$	Término general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
Suma de los *n* primeros términos $s_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$	Suma de todos los términos $s_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$ si $\|r\| < 1$

Además...

Una sucesión **aritmética** es

- **decreciente** si $d < 0$,
- **creciente** si $d > 0$ y
- **constante** si $d = 0$.

Una sucesión **geométrica** cuyo primer término es positivo es

- **decreciente** si $0<r<10<r<1$ y
- es **creciente** si $r>1r>1$.

Y si el primer término es negativo, es

- **creciente** si $0<r<10<r<1$ y
- **decreciente** si $r>1r>1$.

Además, independientemente del primer término, es **constante** si $r=1$ y es **alternada** si r es negativo (cambia el signo en cada término).

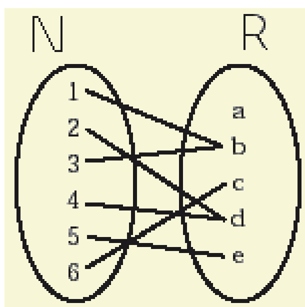
Progresiones Aritméticas y Geométricas

Toda secuencia ordenada de números reales recibe el nombre de sucesión. Dentro del grupo de sucesiones existen dos particularmente interesantes por el principio de regularidad que permite sistematizar la definición de sus propiedades: las progresiones aritméticas y geométricas.

Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una clase de **sucesión** de números reales en la que cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad fija predeterminada denominada **diferencia**. Llamando d a esta diferencia, el **término general** de la progresión a_n , que ocupa el número de orden n en la misma, se puede determinar a partir del valor del primero de los términos, a_1.

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)\, d.}$$



Las sucesiones (por ejemplo, las progresiones aritméticas y geométricas) pueden verse como correspondencias unívocas entre el conjunto de los números naturales N y el de los reales R.

Suma de los términos de una progresión aritmética

Para determinar la **suma** de un número finito de términos de una progresión aritmética, denotada por a_1, a_2, a_3,..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, basta con considerar el principio de que los pares de términos a_1 y a_n, a_2 y a_{n-1}, a_3 y a_{n-2}, etcétera, son **equidistantes**, de manera que todos estos pares suman una misma cantidad.

Generalizando esta consideración, se tiene que la suma de todos los términos de una progresión aritmética es igual a:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Interpolación de términos en una progresión aritmética

Entre cada dos términos a y b de una progresión aritmética es posible interpolar otros m términos, llamados **medios diferenciales**, de manera que todos ellos integren una nueva progresión aritmética (con m + 2 términos) donde a y b sean los extremos.

La diferencia de esta progresión se determinará con arreglo a la siguiente fórmula:

$$d = \frac{b - a}{(m + 1)}$$

Progresiones geométricas

Otra forma común de sucesión es la constituida por las llamadas **progresiones geométricas**. Estas progresiones se definen como aquellas en las que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un valor fijo predefinido que se conoce como **razón**.
El término general a_n de una progresión geométrica puede escribirse como:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Suma y producto de los términos de una progresión geométrica

La suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica puede calcularse a partir de cualquiera de las siguientes expresiones:

$$S_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Esta fórmula sólo es válida si $r \neq 1$, ya que si $r = 1$ todos los términos de la progresión serían iguales, y la suma sería $\mathbf{S_n = a_1 \cdot n}$.

Cuando r > 1, la progresión crece indefinidamente y la suma de sus términos tiende a infinito. En cambio, si r < 1, cada término será menor que el anterior, y la progresión se irá acercando a 0 conforme aumente el número de sus términos. Cuando | r | < 1, puede demostrarse que la suma se convierte en:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

Por otra parte, es fácil obtener que el producto de los n primeros términos de una progresión geométrica es igual a:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Interpolación de términos en una progresión geométrica

Entre dos términos a y b de una progresión geométrica es posible intercalar m términos, denominados **medios geométricos o proporcionales**, tales que todos ellos (los m + 2 términos resultantes) constituyan una nueva progresión geométrica de razón r determinada como:

$$r = \sqrt[m+1]{b/a}$$

Problemas Resueltos

1. En una progresión aritmética, sabemos que el sexto término es 28 y que la diferencia es 5. Calcular el término general y los 5 primeros términos.

- Conocemos el término 6-ésimo y la diferencia:

$$a_6 = 28, \quad d = 5$$

- Queremos calcular el término general de la sucesión, a_n, que sabemos que es de la forma

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

- Como la diferencia es d=5, tenemos:

$$a_n = a_1 + (n-1)d =$$

$$= a_1 + 5(n-1)$$

- Necesitamos calcular el primer término de la sucesión, a1a1. Para ello, aplicamos la fórmula para el caso n=6 ya que sabemos que a_6=28. Sustituimos en la fórmula:

$$28 = a_6 = a_1 + (6-1)5 = a_1 + 25 \quad \rightarrow$$

$$28 = a_1 + 25 \quad \rightarrow \quad a_1 = 3$$

- Por tanto, el término general de la sucesión aritmética es:

$$a_n = 3 + 5(n-1)$$

- Los cinco primeros términos son:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3 + 5 \cdot 1 = 8$$
$$a_3 = 3 + 5 \cdot 2 = 13$$
$$a_4 = 3 + 5 \cdot 3 = 18$$
$$a_5 = 3 + 5 \cdot 4 = 23$$

Nota: hemos calculado los términos aplicando la fórmula obtenida, pero una vez sabemos que el primer término es 3 y que la diferencia es 5, podemos obtener fácilmente los términos sumando 5:

a_1=3

a_2=3+5=8

a_3=8+5=13

a_4=13+5=18

a_5=18+5=23

2. En una progresión geométrica, sabemos que el primer término es 6 y el cuarto 48. Calcular el término general y la suma de los 5 primeros términos.

   Conocemos el primer y el cuarto término:

$$a_1 = 6, \qquad a_4 = 48$$

Puesto que la progresión es geométrica, su fórmula general es de la forma

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

De dicha fórmula conocemos el término a_1, pero no conocemos la razón, rr. Para calcularla, aplicamos la fórmula para el caso n=4 porque sabemos que a_4=48:

$$48 = a_4 = 6 \cdot r^3 \rightarrow$$

$$48 = 6r^3 \qquad \rightarrow$$

$$r^3 = \frac{48}{6} = 8 \qquad \rightarrow$$

$$r = \sqrt[3]{8} = 2$$

Por tanto, la razón es r = 2 y el término general es:

$$a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$$

Para calcular la suma de los 5 primeros términos, aplicamos la fórmula. Necesitaremos calcular el término a_5:

$$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} =$$

$$= \frac{a_5 \cdot 2 - 6}{2 - 1} =$$

$$= a_5 \cdot 2 - 6$$

$$a_5 = 6 \cdot 2^4 = 96$$

$$S_5 = 96 \cdot 2 - 6 = 186$$

3. Encontrar el término general de la sucesión

20, 19.3, 18.6, 17.9,…

¿Es aritmética o geométrica? Encontrar los términos: décimo (10), vigésimo (20) y trigésimo (30).

Si la sucesión es aritmética, entonces la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es la misma.

Buscamos la diferencia:

$$d = a_2 - a_1 = 19.3 - 20 = -0.7$$
$$d = a_3 - a_2 = 18.6 - 19.3 = -0.7$$
$$d = a_4 - a_3 = 17.9 - 18.6 = -0.7$$

Se trata de una sucesión aritmética con diferencia d = -0.7 (es una sucesión decreciente, $d < 0$). Por tanto, el término general es:

$$a_n = a_1 + (n-1)d =$$

$$= 20 - 0.7(n-1)$$

Aplicando dicha fórmula podemos calcular los términos décimo, vigésimo y trigésimo:

$$a_{10} = 20 - 0.7 \cdot 9 = 17.3$$
$$a_{20} = 20 - 0.7 \cdot 19 = 6.7$$
$$a_{30} = 20 - 0.7 \cdot 29 = -0.3$$

4. Encontrar el término general de la sucesión

$$0.5, 0.25, 0.125, 0.0625,...$$

¿Es aritmética o geométrica? Calcular los términos *n*- ésimos para los valores de $n = 10, 100$.

Se sabe que la suma de los infinitos términos de esta sucesión es 1 (ejercicio 26). Razonar cómo es posible que la suma de infinitos términos positivos no sea infinita.

Buscamos la diferencia:

$$d = a_2 - a_1 = 0.25 - 0.5 = -0.25$$
$$d = a_3 - a_2 = 0.125 - 0.25 = -0.125$$

Puesto que los valores no coinciden, la sucesión no es aritmética.

Buscamos la razón:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$
$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{0.125}{0.25} = 0.5$$
$$r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{0.0625}{0.25} = 0.5$$

Se trata de una sucesión geométrica de razón $r = 0.5$ (decreciente puesto que $r < 1$).
Como conocemos el primer término y la razón, el término general es

$$a_n = a_1 r^{n-1} =$$

$$= 0.5 \cdot 0.5^{n-1} =$$

$$= 0.5^n =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2^n}$$

Así, podemos calcular los términos 10-ésimo y 100-ésimo:

$$a_{10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \cong 0.0009765625$$

$$\begin{aligned} a_{100} &= \frac{1}{2^{100}} = \\ &= \frac{1}{1267650600228229401496703205376} \cong \\ &\cong 7.888609052 \cdot 10^{-31} \end{aligned}$$

$$S_\infty = 1$$

Observamos que los términos de la sucesión son muy pequeños: el décimo tiene tres ceros detrás de la coma y el centésimo, tiene treinta.

Aunque los términos de la sucesión son positivos, éstos son cada vez más pequeños y muy próximos a 0. De este modo, al sumarlos, apenas incrementa el valor, aunque sumemos infinitos números.

5. En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es 1 y la suma de los 10 primeros términos es 63. Calcular el término general.

Conocemos el primer término y la suma de los diez primeros términos:

$$a_1 = 1, \qquad S_{10} = 63$$

Utilizaremos las fórmulas del término general y de la suma (de una progresión aritmética) para poder calcular la diferencia, d. Dichas fórmulas son:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d(n-1) = \\ &= 1 + d(n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \\ &= \frac{n(1 + a_n)}{2} \end{aligned}$$

Hemos escrito en las fórmulas $a_1=1$.

Sustituimos los datos conocidos:

$$63 = S_{10} = \frac{10(1 + a_{10})}{2} \;\rightarrow\; 63 = \frac{10(1 + a_{10})}{2}$$
$$a_{10} = 1 + d(10 - 1) = 1 + 9d$$

Podemos sustituir a_{10} en la primera fórmula:

$$63 = \frac{10(1+1+9d)}{2} = \frac{10(2+9d)}{2} = 5(2+9d)$$

De la ecuación resultante obtenemos *d*:

$$63 = 10 + 45d \rightarrow \quad d = \frac{53}{45}$$

Luego la diferencia es d=53/45 y el término general es:

$$a_n = 1 + \frac{53}{45}(n-1)$$

6. Encontrar el término general de la sucesión

1, -2, 4, -8, 16,...

¿Es aritmética o geométrica?

Comprobamos si es aritmética:

$$d = a_2 - a_1 = -2 - 1 = -3$$
$$d = a_3 - a_2 = 4 - (-2) = 6$$

No lo es. Comprobamos si es geométrica:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{2}{1} = -2$$
$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{-2} = -2$$
$$r = \frac{a_4}{a_3} = -\frac{8}{4} = -2$$

Por tanto, es geométrica con razón *r* = -2 y, por tanto, su término general es

$$a_n = a_1 r^{n-1} =$$
$$= 1 \cdot (-2)^{n-1} =$$
$$= (-2)^{n-1}$$

Como la razón es negativa, la sucesión es **alternada**. Esto implica que cada término tiene un signo distinto. En esta sucesión en particular, los términos de posición par son negativos y los otros son positivos.

7. Calcular la suma de todos los números impares comprendidos entre 100 y 200.

Construimos la progresión formada por dichos números:

$$\begin{aligned} &a_1 = 101 \\ &a_2 = 103 \\ &a_3 = 105 \\ &\vdots \\ &a_k = 199 \end{aligned}$$

Hemos usado *k* porque no sabemos qué posición ocupa el último término. Es una progresión aritmética con diferencia *d* = 2 y con término general

$$a_n = 101 + 2(n - 1)$$

Buscamos la posición del último término:

$$a_k = 199 = 101 + 2(k - 1) \rightarrow$$

$$199 = 101 + 2k - 2$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos *k* = 50.

Por tanto, la suma será

$$S_{50} = \frac{50}{2}(101 + 199) = 7500$$

8. En una progresión aritmética, la suma de los dos primeros términos es 12 y la suma del primero con el tercero es 30. Hallar el término general y calcular la suma de los cinco primeros términos.

Como la progresión es aritmética, el término general es

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Tenemos los datos:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 = 12 = a_1 + a_1 + d = 2a_1 + d \\ a_1 + a_3 = 30 = a_1 + a_1 + 2d = 2a_1 + 3d \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones obteniendo el primer término y la diferencia:

$$a_1 = -3, \qquad d = 18$$

Luego el término general es:

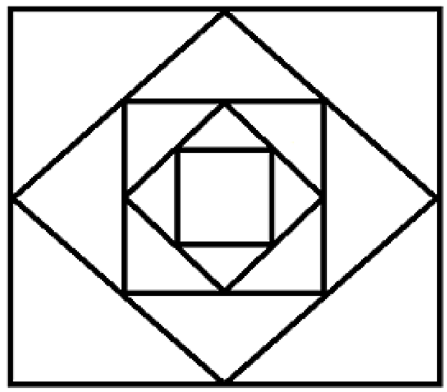
$$a_n = -3 + 18(n - 1)$$

Y la suma de los cinco primeros es:

$$a_5 = -3 + 18 \cdot 4 = 69 \quad \rightarrow$$

$$S_5 = \frac{5}{2}(-3 + 69) = 165$$

9. En un cuadrado de lado 2 se unen los puntos medios de sus lados para obtener otro cuadrado inscrito. Se repite el proceso sucesivamente con los cuadrados obtenidos:



Calcular la sucesión cuyo término n-ésimo corresponde con la longitud del lado del cuadrado n-ésimo. ¿Qué tipo de sucesión es?

Utilizaremos el teorema de Pitágoras ($h^2 = a^2 + b^2$) para calcular los lados.
El lado del cuadrado inicial mide 2.
El lado del primer cuadrado mide

$$\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

El lado del segundo cuadrado mide

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

El lado del tercer cuadrado mide

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El lado del cuarto cuadrado mide

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Tenemos la sucesión

$$2, \sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$$

Es una sucesión geométrica puesto que la razón entre términos consecutivos se mantiene constante:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto, el término general es

$$a_n = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

10. A las 9 de la mañana, una persona cuenta a tres amigos un secreto. Media hora después, cada uno de estos tres amigos cuenta el secreto a otras tres personas. Media hora más tarde, cada uno de éstos cuenta el secreto a otras tres personas y así sucesivamente.
    Calcular cuántas personas saben el secreto a las 9 de la noche suponiendo que cada persona sólo cuenta el secreto a otras tres personas y a nadie más durante el día y que ninguno ha recibido la información varias veces.

    Construimos una sucesión en la que cada término será el número de personas nuevas que conocen el secreto:

$$\begin{aligned} &a_1 = 1 \\ &a_2 = 3 \\ &a_3 = 3 \cdot 3 = 9 \\ &a_4 = 3 \cdot 9 = 27 \\ &\vdots \\ &a_n = 3^{n-1} \end{aligned}$$

Es una sucesión geométrica de razón $r = 3$. Cada media hora se extiende el secreto y el tiempo total son 12h, es decir, 24 medias horas. Entonces, queremos calcular la suma de los 24 primeros términos:

$$S_{24} = \frac{ra_{24} - a_1}{r - 1}$$
$$a_{24} = 3^{23}$$
$$S_{24} = \frac{3a_{24} - 1}{2} = \frac{3^{24} - 1}{2} = 141\,214\,768\,240$$

Es decir, lo sabría el mundo entero ya que en el mundo hay más de 7.300 millones de personas (cifra del 2018).

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROGRESIONES GEOMETRICAS

1. El 2º término de una progresión geométrica es 6, y el 5º es 48. Escribir la progesión.
2. El 1er término de una progresión geométrica es 3, y el 8º es 384. Hallar la razón, y la suma y el producto de los 8 primeros términos.
3. Interpolar tres medios geométricos entre 3 y 48.
4. Calcular la suma de los primeros 5 términos de la progresión: 3, 6, 12, 24, 48, ...
5. Calcular la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente ilimitada:
6. Calcular el producto de los primeros 5 términos de la progresión: 3, 6, 12, 24, 48,...
7. Juan ha comprado 20 libros, por el 1º ha pagado 1Bs.S, por el 2º 2 Bs.S, por el 3º 4 Bs.S, por el 4º 8 Bs.S y así sucesivamente. Cuánto ha pagado por los libros.
8. Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado l, se obtiene otro, en el que volvemos a hacer la misma operación, y así se continua indefinidamente. Calcular la suma de las áreas de los infinitos cuadrados.
9. Hallar la fracción generatriz de 0.18181818...
10. Encontrar la fracción generatriz de 3.2777777...

PROGRESIONES ARITMETICAS

1. El cuarto término de una progresión aritmética es 10, y el sexto es 16. Escribir la progesión.
2. Escribir tres medios aritméticos entre 3 y 23.
3. Interpolar tres medios aritméticos entre 8 y -12.
4. El primer término de una progresión aritmética es -1, y el décimoquinto es 27. Hallar la diferencia y la suma de los quince primeros términos.
5. Hallar la suma de los quince primeros múltiplos de 5.
6. Hallar la suma de los quince primeros números acabados en 5.
7. Hallar la suma de los quince primeros números pares mayores que 5.
8. Hallar los ángulos de un cuadrilátero convexo, sabiendo que están en progresión aritmética, siendo d= 25º.
9. El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 8 cm. Calcula los otros dos, sabiendo que los lados del triángulo forman una progresión aritmética.
10. Calcula tres números en progresión aritmética, que suman 27 y siendo la suma de sus cuadrados es 511/2.