REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
A.C.U.E. COLEGIO LOYOLA GUMILLA
Inscrito en el M. P. P. E. 30.09.1965 – Nº S0690D0701
Puerto Ordaz – Estado Bolívar

GUÍA SOBRE CONTENIDO DE LA UNIDAD III-2do. LAPSO. 2018-2019

NÚMEROS COMPLEJOS

Realizando un recorrido rápido por lo visto hasta ahora, contextualizando, tenemos casos como los siguientes:

- $x^2 = 81$ tenemos dos posibles soluciones en los números reales, 9 y -9

- $x^2 = \frac{16}{9}$ tenemos dos posibles soluciones en los números reales, $\frac{4}{3}$ y $-\frac{4}{3}$
- $x^2 = 5$, tenemos dos posibles soluciones $\sqrt{5}$ y $\sqrt{-5}$

Pero la dificultad se presenta ante una igualdad como la siguiente:

- $x^2 = -25$

Con lo visto hasta ahora no se tiene una solución, porque ya no está en los números reales, porque no se tiene ningún número que multiplicado por sí mismo de un número negativo.

La solución se tiene con los denominados números complejos. Por tanto, se tiene la unidad imaginaria de los números complejos, "***i*".**

Unidad imaginaria

Se llama así al número $\sqrt{-1}$ y se designa por la letra *i*.

$\sqrt{-1} = i$

Donde $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$ **en consecuencia** $\boldsymbol{i}^2 = -1$

De esta manera del anterior ejemplo: $x^2 = -25 = \sqrt{25} \,.\, \sqrt{-1} = 5\,i$

Número complejo

Al número $a + bi$ le llamamos número complejo en forma binómica.

El número a se llama parte real del número complejo.

El número b se llama parte imaginaria del número complejo.

Si b = 0 el número complejo se reduce a un **número real** ya que $a + 0i = a$.
Si a = 0 el número complejo se reduce a bi, y se dice que es un número imaginario puro.

El conjunto de todos números complejos se designa por $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C} = \{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$

- Los números complejos **a + b*i*** y **−a − b*i*** se llaman **opuestos**.
- Los complejos **z = a + b*i*** y **z = a − b*i*** se llaman **conjugados**.
- Dos complejos son **iguales** cuando tienen **la misma componente real y la misma componente imaginaria.**

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos. El **eje X** se llama **eje real** y el **Y**, **eje imaginario**.
El punto **(a, c)**, se llama su afijo.

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$

SUMA Y DIFERENCIA DE NÚMEROS COMPLEJOS

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

COCIENTE DE NÚMEROS COMPLEJOS

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA

Módulo de un número complejo es el módulo del vector determinado por el origen de coordenadas y su afijo. Se designa por **|z|**.

$$z=a+bi$$

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Argumento de un complejo **es el ángulo que forma el vector con el eje real**. Se designa por **arg (z)**.

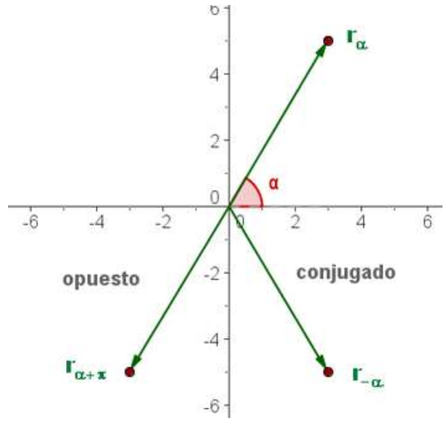
|z| = r **arg (z) =** α **z =** $\mathbf{r_\alpha}$

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\quad\begin{cases}\dfrac{+b}{+a}=\alpha\\[2mm]\dfrac{b}{-a}=180^{o}-\alpha\\[2mm]\dfrac{-b}{-a}=180^{o}+\alpha\\[2mm]\dfrac{-b}{a}=360^{o}-\alpha\end{cases}$$

$$a=r\cdot\cos\alpha \qquad b=r\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

Binómica	$z = a + bi$
Polar	$z = r_\alpha$
trigonométrica	$z = r\,(\cos\alpha + i\,\operatorname{sen}\alpha)$

NÚMEROS COMPLEJOS IGUALES, CONJUGADOS Y OPUESTOS



a. Iguales

$$r_\alpha = r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha' = \alpha + 2\pi k \end{cases}$$

b. Conjugados

$$r_\alpha \textit{ conjugado } r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha' = -\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

c. Opuestos

$$r_\alpha \textit{ opuesto } r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha' = (\alpha + \pi) + 2\pi k \end{cases}$$

PRODUCTO DE COMPLEJOS EN FORMA POLAR

$$r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

Producto por un complejo de módulo 1

Al multiplicar un número complejo $z = r_\alpha$ por 1_β se gira z un ángulo β alrededor del origen.

$$r_\alpha \cdot 1_\beta = r_{\alpha\,+}\, r_\beta$$

Cociente de complejos en forma polar

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{\cdot r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

POTENCIA DE COMPLEJOS EN FORMA POLAR

$$\left(r_\alpha\right)^n = \left(r\right)^n{}_{n\cdot\alpha}$$

Fórmula de Moivre

$$\left(\cos\alpha + i\ sen\ \alpha\right)^n = \left(\cos n\alpha + i\ sen\ n\alpha\right)$$

RAÍZ N-ÉSIMA DE COMPLEJOS EN FORMA POLAR

$$r' = \sqrt[n]{r}$$

$$\alpha' = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}$$

k = 0,1, 2, 3,… (n-1)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. (5 + 2*i*) + (− 8 + 3*i*) − (4 − 2*i*) = (5 − 8 − 4) + (2 + 3 + 2)*i* = **−7 + 7*i***

2. (5 + 2 *i*) · (2 − 3 *i*) = 10 − 15*i* + 4*i* − 6*i*2 = 10 − 11*i* + 6 = **16 − 11*i***

3.

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{\left(3+2i\right)\cdot\left(1+2i\right)}{\left(1-2i\right)\cdot\left(1+2i\right)} = \frac{3+6i+2i+4i^2}{1-\left(2i\right)^2} =$$

$$= \frac{3+8i-4}{1+4} = -\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$$

4. Pasar a la forma polar:

A)

$$z = 1 + \sqrt{3}\, i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = arc\ tg\ \frac{+\sqrt{3}}{+1} = 60^o$$

$$z = 2_{60^o}$$

B)

$$z = 2$$

$$r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$\alpha = arc\ tg\ \frac{0}{+2} = 0^o$$

$$z = 2_{0^o}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular todas las raíces de la ecuación:

$$x^6 + 1 = 0$$

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{\left(3_{20^o}\right)^3}{2_{60^o}}$

b) $(1 + i)^{10}$

c) $(1 + \sqrt{3}\, i)^6$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}}$

3. Resuelve la siguiente raíz, expresando los resultados en forma polar.

$$\sqrt[5]{10+10i}$$

4. Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $1+2i$ y su conjugado.

5. Calcula la siguiente operación, dando el resultado en forma polar.

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}$$

6. Calcula el valor de cociente, y representa los afijos de sus raíces cúbicas.

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$$

7. Expresa en forma polar y binómica un complejo cuyo cubo sea:

$$8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

8. Expresa en función de cos α y sen α:
   a) $\cos 5a$
   b) $\mathrm{sen}\, 5a$

9. Escribe en las formas polar y trigonométrica, los conjugados y los opuestos de:
   a) $4+4i$
   b) $-2+2i$

10. Calcular todas las raíces de la ecuación:

$$x^5 + 32 = 0$$

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
A.C.U.E. COLEGIO LOYOLA GUMILLA
Inscrito en el M. P. P. E. 30.09.1965 – Nº S0690D0701
Puerto Ordaz – Estado Bolívar

NORMATIVAS Y TABLA DE ESPECIFICACIONES PARA LA ELABORACIÓN DE LAS RESPUESTAS A PLANTEAMIENTOS

1. Los grupos seguirán conformados como ya se les indico y deben identificarse con el numero ya asignado.
2. Deben elaborarle una portada a los resultados que enviaran, donde se especifiquen:
   a. Identificación de la institución
   b. Año y sección en que cursa
   c. Título, Como título colocarán: **RESOLUCIÓN DE PLANTEAMIENTOS.**
   d. Integrantes del grupo, identificados por nombres y apellidos; y en orden alfabético. Además el numero como quedo identificado su grupo.
3. Los planteamientos a resolver deben estar **plenamente justificados, si se apoyaron en algún autor deben señalarlos en las referencias.**
4. **Alumno que no esté identificado en la portada, no tendrá nota**, se considerará que su grupo no lo consideró por no aportar nada para llegar a las soluciones.
5. Las repuesta(s) y justificación (es), deben estar elaboradas en letra Arial, numero 12. Con espacio interlineado de 1,5 sin espaciado superior o inferior.
6. Deben responder los planteamientos según la índole de la pregunta, pero siempre justificando su repuesta, sin importar si es verdadero, falso o debe desarrollarla.
7. Fecha tope de entrega: **lunes, 01 de abril de 2019, hora tope, las 06:00 p.m.**
8. Todo correo o escrito de las resoluciones de los planteamientos que sean recibidos fuera de lo especificado en el punto 7. **NO SERÁ CORREGIDO.**
9. **Enviar sus soluciones al correo: dinoram10@gmail.com**
10. Este puntaje será la parte teórica de su evaluación sobre números complejos, la otra parte a evaluar será en función de 12 puntos y será

netamente práctica. **SI LO PERMITEN LOS TIEMPOS, SINO, SE TOMARAN LAS MEDIDAS PARA EVALUAR ESOS 12 PUNTOS.**

11. El valor total de las resoluciones de las cuestiones planteadas, es de 8,00 puntos, los cuales están desglosados en la tabla señalada a continuación:

PARAMETROS A EVALUAR	**PUNTUACIÓN (ptos.)**
Elaborar portada según especificaciones dadas	0,25
Errores ortográficos	0,25
Respuestas bien elaboradas	0,50 C/U
Justificaciones	0,95 C/U
Referencias bibliográficas	0,25
TOTAL	**8,00**

POR FAVOR, LEER DETENIDAMENTE E INTERPRETAR LAS NORMATIVAS DADAS.